▶**R13** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 8 + 8i\sqrt{3}$.

Recherche

Les exponentielles complexes permettent de travailler simplement avec des puissances : on va poser $z = re^{i\theta}$, en déduire forme la forme exponentielle complexe de z^4 puis, en disposant la forme exponentielle complexe de $8 + 8i\sqrt{3}$ on va d'utiliser la règle : deux complexes non nuls sont égaux $\Leftrightarrow$ ils ont même module et des arguments congrus modulo 2π.

$0^4 = 0 \neq 8 + 8i\sqrt{3}$ donc 0 n'est pas solution de (E) par conséquent toute solution de (E) peut s'écrire $z = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, d'où : $z^4 = \left(re^{i\theta}\right)^4 = r^4 e^{i4\theta}$.

D'autre part :

$$8 + 8i\sqrt{3} = 16\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16e^{i\frac{\pi}{3}}$$

L'équation (E) peut donc s'écrire : $r^4 e^{i4\theta} = 16e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Or, deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont des modules égaux et des arguments congrus modulo 2π, donc :

$r^4 = 16 \Leftrightarrow r^4 = 2^4 \Leftrightarrow r = 2$ $(r > 0)$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

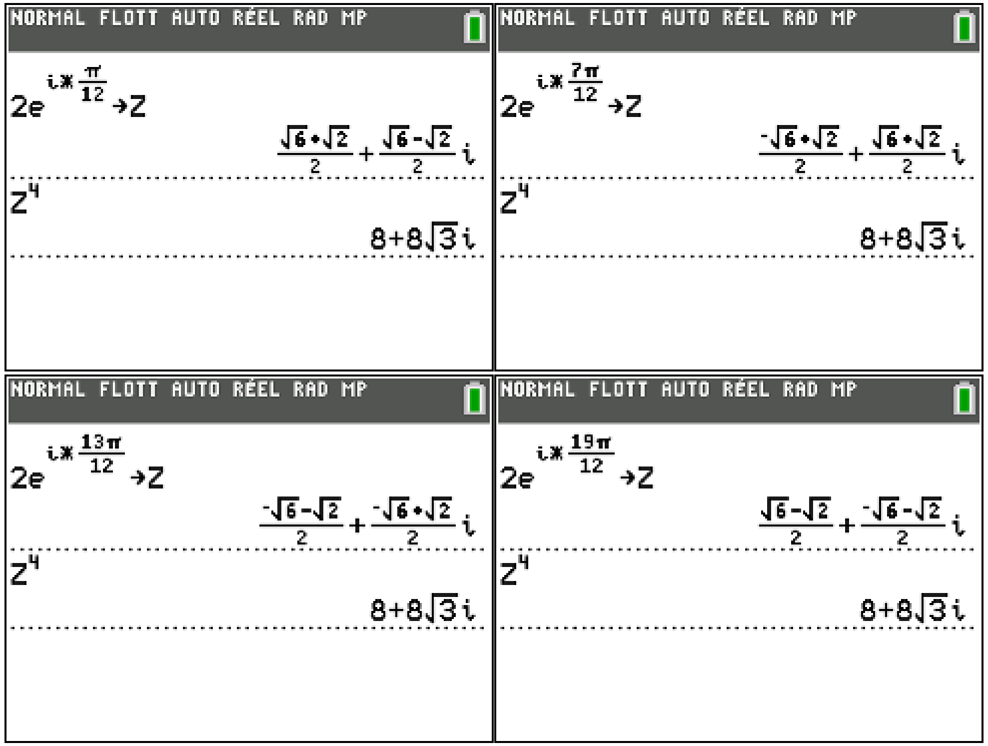
$$4\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{4}$$

$\boxed{M}$ $\frac{2\pi}{\mathbf{4}}$ donc on ne va tester que les **4** entiers : 0, 1, 2 et 3.

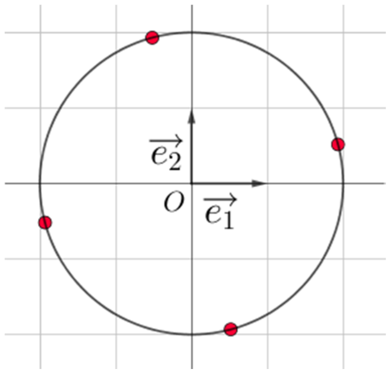
- pour $k = 0 : \theta = \frac{\pi}{12}$
- pour $k = 1 : \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{12} + \frac{6\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$
- pour $k = 2 : \theta = \frac{\pi}{12} + 2 \times \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{12} + \frac{12\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$
- pour $k = 3 : \theta = \frac{\pi}{12} + 3 \times \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{12} + \frac{18\pi}{12} = \frac{19\pi}{12}$

L'équation (E) admet trois solutions :

$$\boldsymbol{z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{12}}, z_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}, z_2 = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}} \text{ et } \boldsymbol{z_2 = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}}$$



Remarque :



Les points d'affixe z_0, z_1, z_2 et z_3 sont situés sur un cercle de centre l'origine du repère et de rayon 2. $(r = 2)$